ECUACIONES DE MOVIMIENTO

(PRÁCTICA 2: MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES)

Ing. Francisco Franco – Web: http://mgfranciscofranco.blogspot.com/

Fuente de información: Trabajo de grado de Mónica A. Camacho D. y Wilson H. Imbachi M.

Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

El sistema diseñado para la práctica de movimiento bidimensional se divide en cuatro tramos a través de los cuales el cuerpo se desplaza realizando diferentes tipos de movimiento, como se muestra en la figura 2.

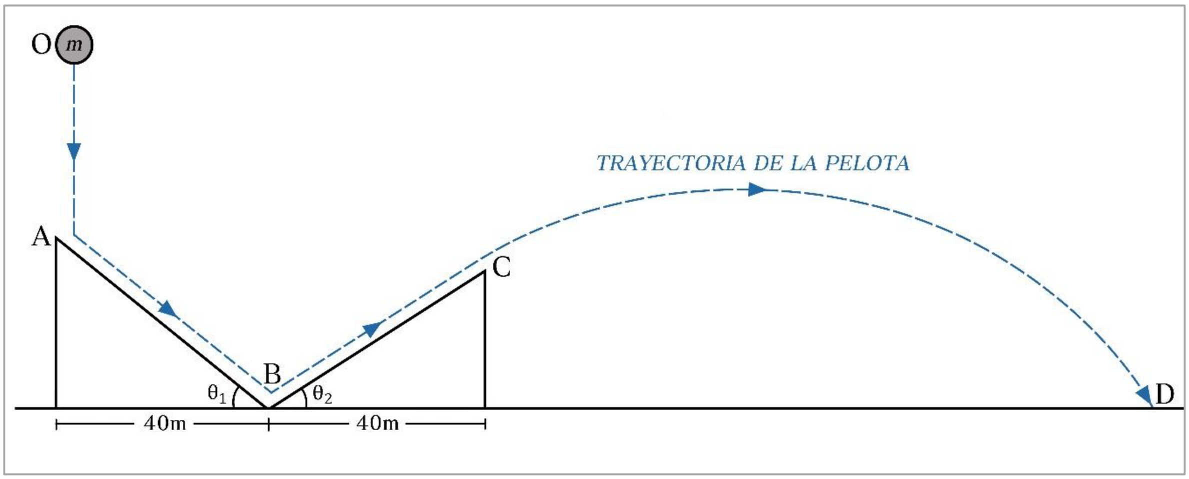

Figura 2. Práctica de vectores – Sistema general.

Las ecuaciones que describen el movimiento de la pelota a través de los tramos definidos se muestran a continuación:

2.1. MOVIMIENTO DE CAIDA LIBRE (TRAMO O-A):

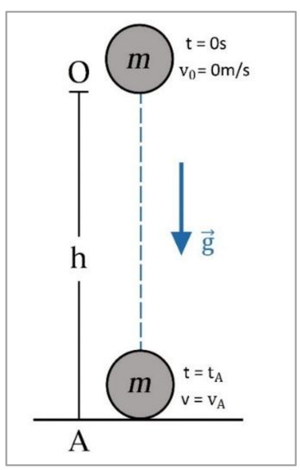

Figura 3. Movimiento de caída Libre.

El primer movimiento que realiza la pelota es el de caída libre, el cual comprende el tramo O-A del sistema general, como lo muestra la figura 3. En primera instancia, la pelota de masa m se ubica a una altura inicial h respecto del vértice superior de la rampa 1 (punto A) y se deja caer bajo la acción de la fuerza de gravedad (los efectos causados por la fricción del aire se desprecian). Tomando como sistema de referencia el punto A y suponiendo negativa la dirección del movimiento de la pelota se determinan las expresiones generales de aceleración, velocidad y posición en función del tiempo dentro del movimiento de caída libre.

De acuerdo al sistema de referencia escogido se tiene que la aceleración de la partícula debida a la gravedad se expresa de la siguiente forma:

$$a = -g \tag{12}$$

Este valor de aceleración es constante durante todo el recorrido de la pelota. Por su parte, la expresión general de velocidad se obtiene integrando el valor aceleración en función del tiempo:

$$v = \int a dt = \int (-g) dt = -gt + c_1$$

Se determina el valor de la constante c_1, para ello se evalúa la función de velocidad v en el instante $t = 0$:

$$v(t=0) = v_0 = 0$$

$$v_0 = -g(0) + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

Por lo tanto la función de velocidad para el movimiento de caída libre queda definida como:

$$v = -gt \tag{13}$$

De forma similar se calcula la expresión para la posición en y de la pelota, integrando la función general de velocidad respecto al tiempo:

$$y = \int v dt = \int (-gt) dt = \frac{-gt^2}{2} + c_2$$

Se determina el valor de la constante c_2 evaluando la función de posición y en el instante *t = 0*:

$$\mathrm{y}(t=0)=y_0=h$$

$$y_0=\frac{-g(0)^2}{2}+c_2=h\rightarrow c_2=h$$

De esta forma la ecuación de posición en dirección y para el movimiento de caída libre es:

$$y=\frac{-gt^2}{2}+h \tag{14}$$

Con las ecuaciones de movimiento del tramo de caída libre se calcula el tiempo t_A que demora la pelota en ir desde el punto O (*h* metros) hasta el punto A (*0* metros). Para ello se toma la función de posición como $y = 0$:

$$y=0=\frac{-g(t_A)^2}{2}+h$$

$$\frac{g(t_A)^2}{2}=h$$

$$t_A=\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{15}$$

Conociendo el tiempo t_A se determina el valor de velocidad de la pelota en el punto A:

$$v(t=t_A)=v_A=-g\,\mathrm{t}_A=-g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

$$v_A=-\sqrt{2gh} \tag{16}$$

2.2. MOVIMIENTO SOBRE EL PLANO INCLINADO DESCENDENTE (TRAMO A-B):

Después del movimiento de caída libre la pelota se sitúa dentro de la rampa 1, como lo muestra la figura 4. Este plano inclinado de tipo descendente cuenta con una base de 40 metros de longitud y un ángulo de inclinación variable (θ_1). Las únicas fuerzas que actúan sobre la pelota son la normal (N) y el peso (W), pues se considera que la superficie de la rampa es completamente lisa y por tanto no presenta ningún tipo de fricción. La velocidad inicial de la pelota dentro de la rampa es v_A (velocidad final de la partícula en caída libre).

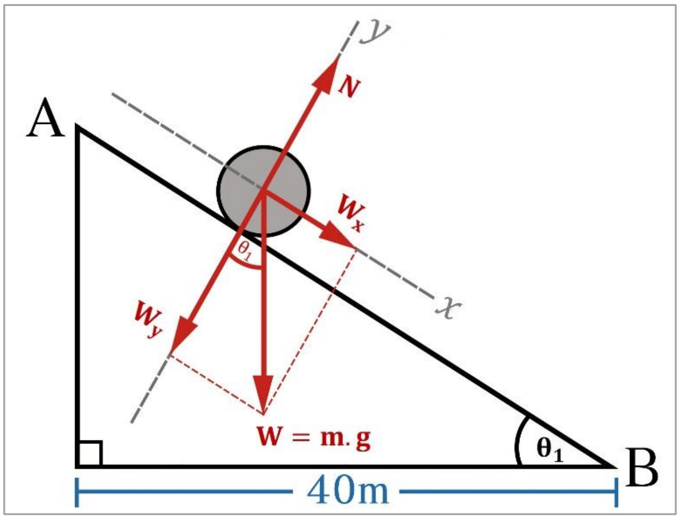

Figura 4. Plano Inclinado descendente.

Se establece un sistema de coordenadas xy acorde con el tipo de movimiento de la pelota. De acuerdo a la figura 4 se observa que todo el movimiento se realiza en dirección x, por lo tanto la aceleración de la partícula dentro de la rampa 1 equivale al valor de su componente en dicha dirección ($a_y = 0$). Con base en la segunda ley de Newton se determinan los valores correspondientes de aceleración en dirección x y fuerza normal ejercida por la rampa sobre la pelota:

$$\sum F_x = mg\sin\theta_1 = ma_x$$

$$a_x = g\sin\theta_1 \quad \textbf{(17)}$$

$$\sum F_y = N - mg\cos\theta_1 = ma_y = 0$$

$$N = mg\cos\theta_1 \quad \textbf{(18)}$$

Conociendo el valor de la aceleración se define la expresión general de posición de la pelota a lo largo de la rampa, para ello se recurre a la ecuación de desplazamiento en función del tiempo del movimiento de partículas en una dimensión. Relacionando dicha ecuación con los parámetros correspondientes de este subsistema se tiene:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x - x_0 = v_{x01} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Considerando que la partícula inicia su movimiento en el punto A se tiene que $x_0 = 0$, de esta forma su función de posición es:

$$x = v_{x01} t + \frac{1}{2} \mathrm{a}_x t^2 = v_A t + \frac{1}{2} g \sin\theta_1 t^2$$

$$x = \frac{1}{2} g \sin\theta_1 t^2 + v_A t \tag{19}$$

En el tiempo $t = t_B$ la pelota recorre toda la longitud de la rampa 1 ($x = d_1$). Al igualar este valor con la ecuación (19) se tiene que:

$$x = d_1 = \frac{1}{2} g \sin\theta_1 {t_B}^2 + v_A t_B$$

Por lo tanto el tiempo t_B equivale a:

$$\frac{1}{2} g \sin\theta_1 \left(t_B\right)^2 + v_A \left(t_B\right) - \mathrm{d}_1 = 0$$

$$t_B = \frac{-v_A \pm \sqrt{{v_A}^2 + 2 g \sin\theta_1 d_1}}{g \sin\theta_1}$$

De la solución de la ecuación cuadrática, la expresión del tiempo t_B es:

$$t_B = \frac{-v_A + \sqrt{{v_A}^2 + 2g\sin\theta_1 d_1}}{g\sin\theta_1} \quad \textbf{(20)}$$

Al igual que en el caso de la aceleración, la velocidad de la partícula es una cantidad vectorial y se puede expresar por medio de sus componentes en x y y dentro del sistema coordenado establecido, sin embargo debido a que no hay movimiento de la pelota en dirección y su velocidad depende solo de la componente en x, por lo tanto:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$$

$$v_y = 0 \rightarrow v = v_x$$

Se determina la velocidad con que la pelota llega al final de la rampa 1, para ello se utiliza la expresión de velocidad como función del desplazamiento definida dentro del movimiento unidimensional de partículas:

$$v^2 - {v_0}^2 = 2a\left(x - x_0\right)$$

Considerando que la velocidad inicial de la pelota es $v_0 = v_{x01} = v_A$ y que su recorrido al final de la rampa 1 es $x = d_1$ se calcula la velocidad final $v = v_B$ como:

$${v_x}^2 = {v_{x01}}^2 + 2a_x\left(x - x_0\right)$$

$${v_x}^2 = {v_A}^2 + 2g\sin\theta_1 d_1$$

$$v_x = v_B = \sqrt{{v_A}^2 + 2g\sin\theta_1 d_1} \quad \textbf{(21)}$$

En términos generales la velocidad de la pelota en función del tiempo para cualquier punto de la rampa 1 es:

$$v = v_{x01} + a_x t$$

$$v = v_A + g\sin\theta_1 t \quad \textbf{(22)}$$

2.3. MOVIMIENTO SOBRE EL PLANO INCLINADO ASCENDENTE (TRAMO B-C):

Después de recorrer la rampa 1 la pelota realiza su movimiento a través del plano inclinado ascendente, el cual comprende el tramo B-C del sistema general, como lo muestra la figura 5. Este plano cuenta también con una base de 40 metros de longitud y un ángulo de elevación variable θ_2. Al igual que en la primera rampa, las únicas fuerzas que actúan sobre la pelota son la fuerza normal (N) y el peso (W) representado por sus componentes en x y y. En este caso tampoco se considera algún tipo de fricción en la superficie de la rampa.

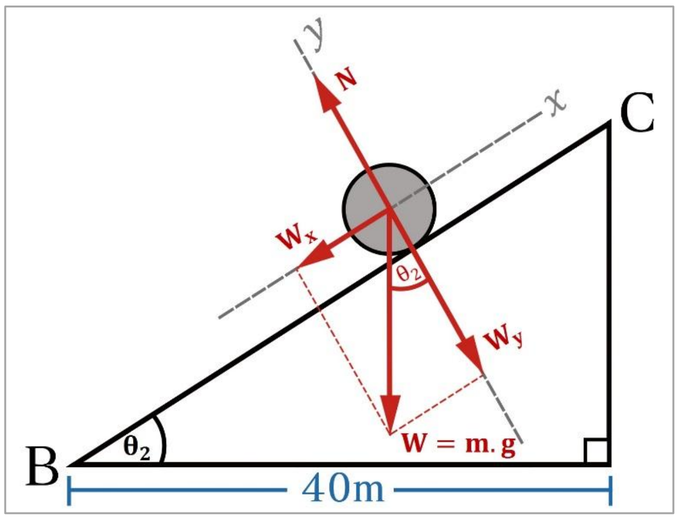

Figura 5. Plano Inclinado ascendente.

Partiendo de la segunda ley de Newton los valores de aceleración en x y la fuerza normal (N) vienen dados como:

$$\sum F_x = -mg\sin\theta_2 = ma_x$$

$$a_x = -g\sin\theta_2 \quad \textbf{(23)}$$

$$\sum F_y = N - mg\cos\theta_2 = ma_y = 0$$

$$N = mg\cos\theta_2 \quad \textbf{(24)}$$

Tomando la ecuación de desplazamiento respecto al tiempo del movimiento unidimensional se tiene lo siguiente:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} \mathrm{a} t^2$$

$$x - x_0 = v_{x02} t + \frac{1}{2} \mathrm{a}_x t^2$$

Del mismo modo que en el caso anterior se toma la posición inicial de la pelota (punto B) como $x_0 = 0$ y la velocidad inicial como $v_0 = v_{x02} = v_B$. De esta manera la función de posición en x se expresa como:

$$x = v_{x02} t + \frac{1}{2} \mathrm{a}_x t^2 = v_B t - \frac{1}{2} g \sin\theta_2 t^2$$

$$x = -\frac{1}{2} g \sin\theta_2 t^2 + v_B t \qquad \textbf{(25)}$$

En el tiempo $t = t_C$ la pelota recorre la longitud total de la rampa 2 ($x = d_2$). Al igualar este valor con la ecuación () se tiene que:

$$x = d_2 = -\frac{1}{2} g \sin\theta_2 {t_C}^2 + v_B t_C$$

Por lo tanto el tiempo t_C equivale a:

$$-\frac{1}{2} g \sin\theta_2 \left(t^2\right) + v_A \left(t\right) - d_2 = 0$$

$$t_C = \frac{-v_B \pm \sqrt{{v_B}^2 - 2 g \sin\theta_2 d_2}}{-g \sin\theta_2}$$

$$t_C = \frac{v_B - \sqrt{{v_B}^2 - 2 g \sin\theta_2 d_2}}{g \sin\theta_2} \qquad \textbf{(26)}$$

La velocidad de la pelota solo depende de su componente en x ya que en la dirección y no existe movimiento, por lo tanto:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$$

$$v_y = 0 \rightarrow v = v_x$$

Se determina la velocidad con que la pelota llega al final de la rampa 2, para esto se utiliza la ecuación de velocidad en función del desplazamiento del movimiento unidimensional:

$$v^2 - v_0{}^2 = 2a\left(x - x_0\right)$$

Reemplazando los valores correspondientes de velocidad inicial, aceleración y recorrido de la pelota se determina el valor de velocidad al final de la rampa 2 ($v_x = v_c$):

$$v_x{}^2 = v_{x02}{}^2 + 2a_x\left(x - x_0\right)$$

$$v_x{}^2 = v_B{}^2 - 2g\sin\theta_2 d_2$$

$$v_x = v_C = \sqrt{v_B{}^2 - 2g\sin\theta_2 d_2} \tag{27}$$

Para este caso la expresión general de velocidad de la pelota en cualquier punto de la rampa 2 es:

$$v = v_{x02} + a_x t$$

$$v = v_B - g\sin\theta_2 t \tag{28}$$

2.4. MOVIMIENTO PARABÓLICO (TRAMO C-D):

Finalmente el último tramo del sistema general comprende un movimiento de tipo parabólico como se observa en la figura 6. El peso de la partícula es la única fuerza presente durante el movimiento ya que se desprecian los efectos resistivos del aire.

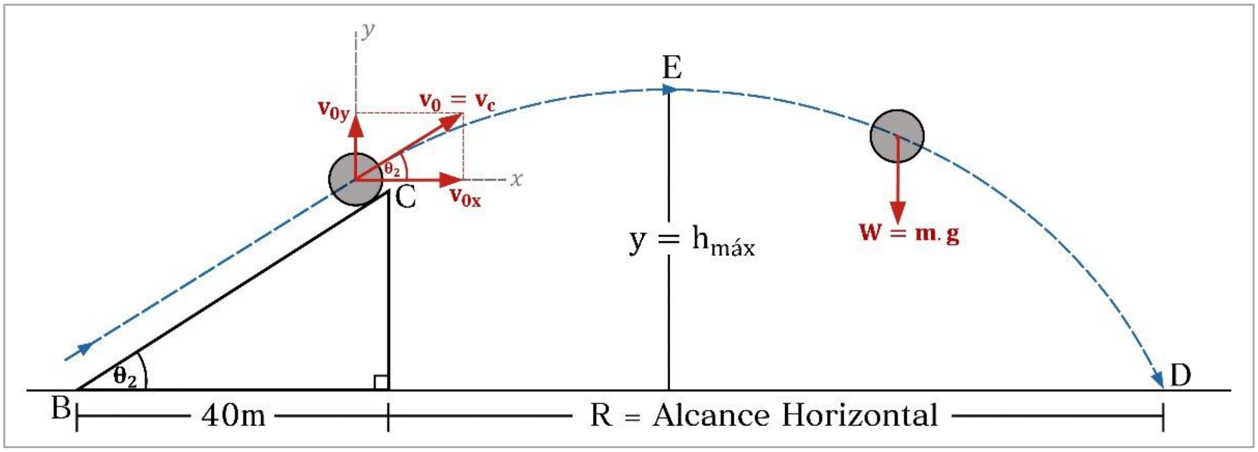

Figura 6. Movimiento parabólico.

Tomando la velocidad inicial de la pelota dentro como $v_0 = v_c$ y un sistema de ejes coordenados xy, se definen las respectivas componentes del vector de velocidad en el punto C de la siguiente forma:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_2 = v_C \cos\theta_2$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_2 = v_C \sin\theta_2 \quad \textbf{(29)}$$

Donde θ_2 es el ángulo de elevación de la rampa 2 en la que se origina el movimiento del proyectil (pelota). Dado que el movimiento parabólico se compone de un movimiento horizontal uniforme y uno vertical acelerado, se tienen los siguientes valores de aceleración en las direcciones x y y:

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow 0 = ma_x$$

$$a_x = 0 \quad \textbf{(30)}$$

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow -mg = ma_y$$

$$a_y = -g \quad \textbf{(31)}$$

Con estos valores de aceleración se determinan las expresiones generales de velocidad de la pelota en ambas direcciones. De esta forma, la velocidad en x es:

$$v_x = \int a_x dt = \int (0) dt = c_1$$

$$v_x(t=0) = v_{0x} = v_C \cos\theta_2 = c_1$$

$$v_x = v_C \cos\theta_2 \quad \textbf{(32)}$$

La ecuación (32) muestra que la velocidad en dirección x es constante durante todo el movimiento de la partícula. Por su parte, la velocidad en dirección y se define como:

$$v_y = \int a_y dt = \int (-g) dt = -gt + c_2$$

$$v_y(t=0) = v_{0y} = v_C \sin\theta_2 = -g(0) + c_2$$

$$v_{0y} = c_2 = v_C \sin\theta_2$$

$$v_y = -gt + v_C \sin\theta_2 \quad \textbf{(33)}$$

De igual manera se determinan las ecuaciones de posición de la pelota integrando las expresiones respectivas de velocidad. Considerando que la partícula inicia su movimiento en $x = 0$ metros, su función de posición en x es:

$$x = \int v_x dt = \int v_C \cos\theta_2 dt = v_C \cos\theta_2 t + c_3$$

$$x(t=0) = 0 = v_C \cos\theta_2 (0) + c_3 \rightarrow c_3 = 0$$

$$x = v_C \cos\theta_2 t \quad \textbf{(34)}$$

Dado que el movimiento parabólico empieza al final de la rampa 2 (punto C), se debe considerar la altura a la cual se encuentra la pelota en el instante inicial (altura de la rampa 2: h_{r2}). Teniendo en cuenta este valor inicial, la función general de posición en la dirección y se calcula de la siguiente forma:

$$y=\int v_y dt=\int\left(-gt+v_C\sin\theta_2\right)dt=-\frac{1}{2}gt^2+v_C\sin\theta_2 t+c_4$$

$$\mathrm{y}\left(t=0\right)=h_{Rampa2}=h_{r2}=-\frac{1}{2}g\left(0\right)^2+v_C\sin\theta_2\left(0\right)+c_4\rightarrow c_4=h_{r2}$$

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_C\sin\theta_2 t+h_{r2} \tag{35}$$

Con base en las expresiones generales de posición se hallan las máximas distancias alcanzadas por la pelota durante el movimiento parabólico: altura máxima ($h_{máx}$) y alcance horizontal (R). Para encontrar el valor de altura máxima se considera un tiempo $t=t_E$ en el cual la pelota alcanza una posición vertical equivalente a $y=h_{máx}$. En este punto la velocidad en dirección y es cero, por lo tanto:

$$v_y=-gt+v_C\sin\theta_2$$

$$t_E=\frac{v_C\sin\theta_2}{g} \tag{36}$$

Con el valor de $t=t_E$ la altura $h_{máx}$ equivale a:

$$h_{máx}=-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_C\sin\theta_2}{g}\right)^2+v_C\sin\theta_2\left(\frac{v_C\sin\theta_2}{g}\right)+h_{r2}$$

$$h_{máx}=-\frac{1}{2}g\left(\frac{{v_C}^2\sin^2\theta_2}{g^2}\right)+\frac{{v_C}^2\sin^2\theta_2}{g}+h_{r2}$$

$$h_{máx}=\frac{{v_C}^2\sin^2\theta_2}{2g}+h_{r2} \tag{37}$$

Del mismo modo se calcula el alcance horizontal de la pelota. Se utiliza la función de posición en y para encontrar un tiempo $t=t_D$ en el cual la pelota desciende hasta una altura igual a cero ($y=0$):

$$y = 0 = -\frac{1}{2} g\left(t_D\right)^2 + v_C \sin\theta_2 \left(t_D\right) + h_{r2}$$

$$t_D = \frac{-v_C \sin\theta_2 \pm \sqrt{{v_C}^2 \sin^2\theta_2 + 2gh_{r2}}}{-g}$$

$$t_D = \frac{v_C}{g}\left(\sin\theta_2 + \sqrt{\sin^2\theta_2 + \frac{2gh_{r2}}{{v_C}^2}}\right) \tag{38}$$

Finalmente con el valor de t_D se determina el valor del alcance horizontal ($x = R$), el cual es equivalente a:

$$x = R = v_C \cos\theta_2 t_D$$

$$R = v_C \cos\theta_2 \left[\frac{v_C}{g}\left(\sin\theta_2 + \sqrt{\sin^2\theta_2 + \frac{2gh_{r2}}{{v_C}^2}}\right)\right]$$

$$R = \frac{{v_C}^2}{g}\left(\sin\theta_2 + \sqrt{\sin^2\theta_2 + \frac{2gh_{r2}}{{v_C}^2}}\right)\cos\theta_2 \tag{39}$$